

PARTIELLE ABLEITUNGEN

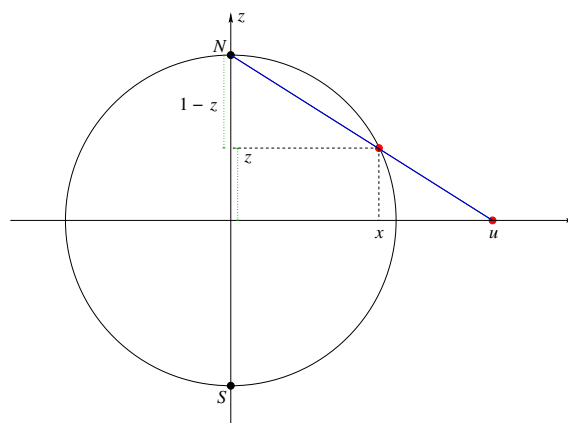
Anhand eines Koordinatenwechsels üben wir den Umgang mit partiellen Ableitungen.

[P28] Stereographische Projektion

Wir betrachten die stereographische Projektion der Punkte auf der Oberfläche einer Einheitskugel auf die Fläche durch ihren Äquator. Ein Punkt auf der Kugel ist gegeben als $x = (x^1, x^2, z)$ mit $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1 - z^2$. Die Punkte in der Ebene sind einfach gegeben als $u = (u^1, u^2)$. Die entscheidende Beziehung zwischen x und u ergibt sich aus der Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{u^i}{1} = \frac{x^i}{1 - z},$$

wobei z vom Kugelmittelpunkt aus gemessen wird.



- (a) Geben Sie $u^i, i = 1, 2$, als Funktion $u^i(x^i, z)$ an.
- (b) Verwenden Sie die Bedingung $x^i x^i = 1 - z^2$, um zunächst $u^i u^i$ durch z auszudrücken, und dies dann nach z aufzulösen. Sie erhalten so z als Funktion $z(u^1, u^2)$.
- (c) Wie sind die $x^i, i = 1, 2$ als Funktion $x^i(u^1, u^2)$ gegeben?
- (d) Berechnen Sie die Tangentialvektoren $t_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}, i = 1, 2$, wobei $x = (x^1, x^2, z)$ ist.
- (e) Berechnen Sie die Metrik $g_{ij} = t_i \cdot t_j$.
- (f) Berechnen Sie die Determinante der Metrik g . Sie erhalten damit das Volumenelement

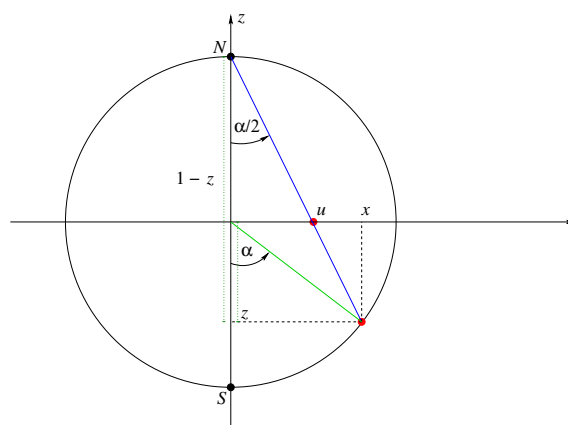
$$d \text{ Vol} = \sqrt{\det g} du dv = \left(\frac{2}{1 + u^2} \right)^2 du dv.$$

- (g) Die Überlegungen (a) - (f) lassen sich ohne jede Mühe auf den Fall der stereographischen Projektion der Oberfläche S^n einer $(n + 1)$ -dimensionalen Einheitskugel auf die Hyperebene durch ihren Äquator verallgemeinern, wobei $x = (x^1, x^2, \dots, x^n, z)$ mit $x^i x^i + z^2 = 1$ und $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ ist.

- (h) Betrachten Sie den im zweiten Bild dargestellten Fall der stereographischen Projektion eines Punktes auf der Südhalbkugel. Machen Sie sich klar, dass die stereographische Projektion die Beziehungen

$$x = \sin \alpha, \quad |z| = \cos \alpha \quad \text{und} \quad u = \tan \frac{\alpha}{2}$$

impliziert. Für die letztere müssen Sie von den Additionstheoremen für \sin und \cos umgekehrt Gebrauch machen.



[P25] $SU(2)$ und Drehungen

Setzen Sie die Bearbeitung dieser Aufgabe von vorletzter Woche fort.